



TITLE:

ある弱擬凸領域における
 $\bar{\partial}$ -ノイマン問題に対
する劣楕円の評価について(超局所
解析とその応用)

AUTHOR(S):

長谷川, 研二

CITATION:

長谷川, 研二. ある弱擬凸領域における $\bar{\partial}$ -ノイマン問題に
対する劣楕円の評価について(超局所解析とその応用). 数理解析研究所
講究録 1991, 750: 111-122

ISSUE DATE:

1991-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/82029>

RIGHT:

ある弱擬凸領域における $\bar{\partial}$ -イマニ問題 に対する局所的評価について

工学院大 長谷川研二 (Kenji HASEGAWA)

§0. 概説

Ω を \mathbb{C}^n の有界領域としてその境界 $\partial\Omega$ は滑らかと仮定する。 $\bar{\partial}$ の近傍上に滑らかに挙動する Hermite 計量を導入することによって (p, q) -形式の空間に内積 (\cdot, \cdot) を定義できる。この時 (p, q) -形式を $(p, q+1)$ -形式に写す作用素 $\bar{\partial}$ に対する共役作用素 ∂^* を得ることが出来る。 x_0 を $\partial\Omega$ 上の点として U を x_0 の近傍とする。 $\mathcal{O}^{p, q}(\bar{\Omega} \cap U)$ を係数が $C^\infty(\bar{\Omega} \cap U)$ に属する函数で任意の滑らかな $(p, q+1)$ -形式 ψ に対して

$$(0.1) \quad (\varphi, \partial^* \psi) = (\bar{\partial} \varphi, \psi),$$

となる (p, q) -形式 φ を集めることによって形成される空間とする。 (0.1) は $\partial\Omega$ の境界値に対する条件となっており、 $\varphi \in \mathcal{O}^{p, q}(\bar{\Omega} \cap U)$ に対して次の不等式を考える。

$$(0.2) \quad \|\varphi\|_{(\varepsilon)} \leq C (\|\bar{\partial} \varphi\| + \|\partial^* \varphi\| + \|\varphi\|).$$

ここで $\|\cdot\|_{(\varepsilon)}$ は指数 $\varepsilon > 0$ の Sobolev norm とする。もし任意の $\varphi \in \mathcal{O}^{p, q}(\bar{\Omega} \cap U)$ に対して (0.2) が成立すると、Cauchy-Riemann 方程式 $\bar{\partial} u = f$ で f が $\bar{\Omega} \cap U$ 上で Sobolev 空間 H^s に属してゐるならば u は $\bar{\Omega} \cap U$ で $H^{s+\varepsilon}$ に属してゐることを導

くことが出来る。

(0.2) が成立する z_0 の近傍が存在するための Ω の z_0 の近傍における幾何的条件についての研究は盛んに行なわれている。Kohn [7] は Ω が z_0 の近傍で強擬凸であれば、任意の q に対して (0.2) が $\varepsilon = 1/2$ で成立することを示し、Folland-Kohn [3] では Ω の z_0 における Levi 形式が $n-q$ 個以上の正の固有値を持つか、あるいは $q+1$ 個以上の負の固有値を持つことと (p, q) -形式に対して $\varepsilon = 1/2$ で (0.2) が成立することが同値であることを証明した。 $\varepsilon < 1/2$ となる場合でも Ω が擬凸と仮定すると Kohn [8] はある $\varepsilon > 0$ で (0.2) が成立するための十分条件を与えており、更に Catlin [2] では必要十分条件を与えている。 ε の最良値に関する結果については Kohn [8] が $q=n-1$ の場合で求めており、Fornæss-Sibony [4] では Ω が凸で $q=1$ の場合で求めている。ところが他の場合については未だはっきりとしていない。Catlin [1] は (0.2) が成立する ε の集合のある上界を次の方法で与えている。 $r(z)$ を \mathbb{C}^n 上の滑らかな函数で $dr(z) \neq 0$, $\Omega = \{z; r(z) < 0\}$ となるものとする。 q 次元解析集合 V^q に対して

$$\tau(V^q; z_0) = \sup \{ \eta; |r(z)| \leq C |z - z_0|^\eta, z \in V^q \},$$

とおき、 Ω の z_0 における形状を表わす指数 $T_q(z_0)$ を次の様に定義する。

$$T_q(z_0) = \sup_{\nu \in \mathcal{Q}} t(\nu, z_0).$$

そこで彼は $1/T_q(z_0)$ が ε の上界であることを証明した。前に述べた [4] や [8] で与えられている最良の ε は $1/T_q(z_0)$ となっている。したがってもし $\varepsilon \geq 1/T_q(z_0)$ となるある ε で (0.2) が成立することが証明できれば、 $\varepsilon = 1/T_q(z_0)$ でこの ε が最良の値であることが分る。本論では適当にある弱擬凸領域を設定して、その領域に対する最良の ε を与えることを目標とする。

§1. 主な結果

$r_1(w_1, \dots, w_m)$ を \mathbb{C}_w^m の原点のある近傍上で定義された滑らかな函数として $r_1(0) = 0$, $\partial r_1 / \partial w_m(0) \neq 0$ とする。これを用いて定義された領域 $\Omega' = \{w; r_1(w) < 0\}$ が原点の近傍で強擬凸であると仮定する。更に $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_{n-1}$ となる整数列 $\{m_i\}_{i=1}^{n-1}$ を用意して \mathbb{C}_z^n の原点のある近傍上で定義された滑らかな函数 $r_2(z_1, \dots, z_n)$ が次の条件を満たすとする:

$$(1.1) \quad r_2(0) = \frac{\partial r_2}{\partial z_n}(0) = \frac{\partial^2 r_2}{\partial z_n \partial \bar{z}_n}(0) = 0$$

$$(1.2) \quad \left| \frac{\partial r_2}{\partial z_i}(z) \right| \leq C |z| |z_i|^{m_i}, \quad \left| \frac{\partial^2 r_2}{\partial z_i \partial \bar{z}_n}(z) \right| \leq C |z| |z_i|^{m_i} \quad i=1, \dots, n-1$$

}

$$(1.3) \quad \left| \frac{\partial^2 r_2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z) \right| \leq C |z| |z_i|^{m_i} |z_j|^{m_j} \\ i, j = 1, \dots, n-1,$$

以下で考察する領域 $\tilde{\Omega}$ を次の様に与える.

$$(1.4) \quad \tilde{\Omega} = \{z; r_1(z_1^{m_1+1}, \dots, z_{n-1}^{m_{n-1}+1}, z_n) + r_2(z_1, \dots, z_n) < 0\}.$$

この時次の定理が得られる.

定理 1.1 $\tilde{\Omega}$ における $\bar{\partial}$ -Neumann 問題に対する劣楕円的評価 (0.2) が (p, q) -形式に対して $\varepsilon = 1/2(1+m_{n-q})$ で成立して $\varepsilon > 1/2(1+m_{n-q})$ の時は成立しない).

適当な q 次元複素部分多様体 V を選ぶと

$$|r_1(z) + r_2(z)| \leq C |z|^{2(1+m_{n-q})}, z \in V,$$

となることから $T_q(0) \geq 2(1+m_{n-q})$ が示せる. よって $\varepsilon = 1/2(1+m_{n-q})$ で (0.2) を証明すれば十分である.

§2 接 Cauchy-Riemann 複体

L を $2\tilde{\Omega}$ から $\tilde{\Omega}$ への包含写像とする. この時 $2\tilde{\Omega}$ 上の複体 $B^{Rq}(2\tilde{\Omega})$ を $B^{Rq}(2\tilde{\Omega}) = L^* \mathcal{O}^{Rq}(\tilde{\Omega})$ で定義され, これを接 Cauchy-Riemann 複体と呼ぶ. L_1, \dots, L_n を $\tilde{\Omega}$ 上の滑らかな係数をもつ正則ベクトル場で, L_1, \dots, L_{n-1} が $2\tilde{\Omega}$ に接して, Hermite 計量に関して正規直交性を満たすとする. またそれらと双対な $(0,0)$ -形式を $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n$ として $\omega_i = L^*(\tilde{\omega}_i)$ と置く. この時, $\varphi \in B^{Rq}(2\tilde{\Omega})$ は

$$\varphi = \sum'_{|I|=p, |J|=q} \varphi_{I,J} \omega_I \wedge \bar{\omega}_J$$

ここで \sum' は I と J の指数が単調増大となるものだけの和をとるという意味である。 $\bar{\omega}$ と φ を L によって $\partial\bar{\Omega}$ 上に引き戻して得られた $B^{p,q}(\partial\bar{\Omega})$ の作用素をそれぞれ $\bar{\omega}$ と φ とする。 $\bar{\omega}\varphi$ と $\varphi\bar{\omega}$ は次の形で表わされる:

$$(2.1) \quad \bar{\omega}\varphi = (-1)^p \sum'_{I,J} \sum_{j=1}^{m-1} L_j \varphi_{I,J} \omega_I \wedge \bar{\omega}_j \wedge \bar{\omega}_J + \sum f_{H,L}^{I,J} \varphi_{I,J} \omega_H \wedge \bar{\omega}_L$$

$$(2.2) \quad \varphi\bar{\omega} = (-1)^{p+1} \sum'_{I,K} \sum_{j=1}^{m-1} L_j \varphi_{I,jK} \omega_I \wedge \bar{\omega}_K + \sum g_{H,K}^{I,J} \varphi_{I,J} \omega_H \wedge \bar{\omega}_K.$$

ここで $f_{H,L}^{I,J}$, $g_{H,K}^{I,J}$ は滑らかな函数である。 Sweeney [9] によれば、(2.2) は次の不等式と同値であることが分る。

$$(2.3) \quad \|\varphi\|_{(\varepsilon)} \leq C(\|\bar{\omega}\varphi\| + \|\varphi\bar{\omega}\| + \|\varphi\|), \quad \varphi \in B^{p,q}(\partial\bar{\Omega}).$$

(2.1) と (2.2) より (2.3) は微分方程式系の劣楕円的評価となっている。一般に劣楕円性に関する研究は Hörmander [6] が単独型の場合において、 ε を与えてから劣楕円的評価が成立するための作用素の表象に関する必要十分条件を求めているが系となっている場合は $\varepsilon=1/2$ を除けば殆んど解明されていない。したがって (2.3) を研究することは偏微分方程式論の立場としても非常に興味深い。

§ 3. 局所的な劣楕円的評価

適当な滑らかな函数 $\phi(z_1, \dots, z_{m-1}, z)$ を選ぶことによって $\partial\bar{\Omega} = \{z; \operatorname{Im} z_m = \phi(z_1, \dots, z_{m-1}, \operatorname{Re} z_m)\}$ と表わすことが出来る。

よって (z_1, \dots, z_{m-1}, t) を $\partial\Omega$ の局所座標系として, L_1, \dots, L_{m-1} を次の形で与える

$$(3.1) \quad L_j = \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial z_j}}{i + \frac{\partial \phi}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t}$$

Sweeney [9] は (0.2) の成否は Hermite 計量の選び方に依存しないことを示しているのので, (3.1) の L_j を正規直交基底とする Hermite 計量を導入する.

λ と A を正の数として $\{1, \dots, n-1\}$ の部分集合 Λ に対して \mathbb{C}^{n-1} の部分集合 $U_\Lambda(\lambda)$ を

$$(3.2) \quad U_\Lambda(\lambda) = \{z' \in \mathbb{C}^{n-1}; |z_j| < A\lambda^{-1/2(1+m_j)}, j \in \Lambda, \\ |z_j| \geq A\lambda^{-1/2(1+m_j)} j \notin \Lambda\},$$

とする. $z' \in U_\Lambda(\lambda)$ に対して近傍 $\tilde{\Omega}_{z'}(\lambda)$ を次の式で与える.

$$(3.3) \quad \tilde{\Omega}_{z'}(\lambda) = \{z \in \mathbb{C}^n; |z_j - z'_j| < 1/M_{z'}^{(j)}(\lambda)\},$$

ここで

$$(3.4) \quad M_{z'}^{(j)}(\lambda) = \begin{cases} |z'_j|^{m_j} \lambda^{1/2} & j \notin \Lambda \\ \frac{1}{2A} \lambda^{1/2(1+m_j)} & j \in \Lambda. \end{cases}$$

とする.

$(z', \tilde{t}) \in \partial\tilde{\Omega}$ を固定して, t と ϕ の代りに $\tilde{t}_{(z', \tilde{t})}$ と $\tilde{\phi}_{(z', \tilde{t})}$ を次の式で与える:

$$(3.5) \quad \tilde{t}_{(z', \tilde{t})}(z', t) = t - \tilde{t} + \operatorname{Re} \sum_{\alpha \in \Gamma} d_\alpha(z', \tilde{t})(z' - \tilde{z}')^\alpha,$$

$$(3.6) \quad \tilde{\phi}_{(z', \tilde{t})}(z', \tilde{t}) = \phi(z', \tilde{t} + \tilde{t} - \operatorname{Re} \sum_{\alpha \in \Gamma} d_\alpha(z', \tilde{t})(z' - \tilde{z}')^\alpha)$$

$$-\phi(\frac{z'}{z}, \frac{t}{t}) + \text{Im} \sum_{\alpha \in \Gamma} d_{\alpha}(\frac{z'}{z}, \frac{t}{t}) (z' - \frac{z'}{z})^{\alpha}.$$

ここで

$$\Gamma = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}; \alpha_j \geq 0, 0 < \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j / 2(1+m_j) \leq 1\}$$

とし $d_{\alpha}(\frac{z'}{z}, \frac{t}{t})$ を任意の $\alpha \in \Gamma$ に対して

$$(3.7) \quad \frac{\partial^{\alpha}}{\partial z^{\alpha}} \phi(\frac{z'}{z}, \frac{t}{t}) (z', 0) = 0$$

となる様に与える.

ρ を正の数とし $(\frac{z'}{z}, \frac{t}{t}, \tau) \in \mathbb{C}^{\frac{n-1}{2}} \times \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_{\tau}$ ($\tau \geq \rho$) の近傍 $\tilde{\Omega}_{(\frac{z'}{z}, \frac{t}{t}, \tau)}^{\rho}$ を

$$(3.8) \quad \tilde{\Omega}_{(\frac{z'}{z}, \frac{t}{t}, \tau)}^{\rho} = \{(z', t, \tau); z' \in \tilde{\Omega}_{\frac{z'}{z}}(\tau/\rho), \\ |t_{(\frac{z'}{z}, \frac{t}{t})}(z', t)| < \frac{\tau}{t} - \delta, |\tau - \tau| < \tau^{1-\delta}\},$$

函数 $\psi_{(\frac{z'}{z}, \frac{t}{t}, \tau)}^{\rho}(z', t, \tau)$ を

$$(3.9) \quad \psi_{(\frac{z'}{z}, \frac{t}{t}, \tau)}^{\rho}(z', t, \tau) = \prod_{j=1}^{n-1} \chi(|z_j - \frac{z_j}{z}| / M_{\frac{z'}{z}}^{(j)}(\tau/\rho)) \\ \times \chi(|t_{(\frac{z'}{z}, \frac{t}{t})}(z', t)| \tau^{\delta}) \chi(|\tau - \tau| \tau^{\delta-1}),$$

とする. ただし $\chi(s)$ は滑らかな函数で $|s| \geq 1$ の時 $\chi(s) = 0$, $|s| \leq 1/2$ の時 $\chi(s) = 1$ を満たすとする. また表象が $\psi_{(\frac{z'}{z}, \frac{t}{t}, \tau)}^{\rho}$ となる擬微分作用素を $\mathcal{L}_{(\frac{z'}{z}, \frac{t}{t}, \tau)}^{\rho}(z', t, D_t)$ とする.

$(z', t) \in \partial\Omega$ における Levi 形式を $\mathcal{L}_{(z', t)}(\cdot, \cdot)$ とする (3.1) の L_j に対して $\mathcal{L}_{ij}(z', t) = \mathcal{L}_{(z', t)}(L_i, \bar{L}_j)$ は r_1, r_2 に対する条件より

$$(3.10) \quad \mathcal{L}_{ij}(z', t) = z_i^{m_1} \bar{z}_j^{m_2} \tilde{\mathcal{L}}_{ij}(z', t) + r_{ij}(z', t),$$

と表わせ, 行列 (\tilde{c}_{ij}) は正定値, $r_{ij}(z, t)$ は次の不等式を満たす:

$$(3.11) \quad |r_{ij}(z, t)| \leq C(|z|+|t|)|z_i|^{m_i}|z_j|^{m_j}.$$

よって, ある定数 $C > 0$ が存在して 1 から $n-1$ による q 重指数 I に函数 φ_I を対応させると

$$(3.12) \quad C \sum_{|I|=q} \sum_{i \in I} \|z_i^{m_i} \varphi_I\|^2 \leq \sum_{|K|=q-1} \sum_{i,j} (c_{ij} \varphi_{iK}, \varphi_{jK})$$

が成立する.

劣楕円的评价を得るために2つの補題を用意する.

補題3.1 もし $\partial\bar{\Omega}$ の点 $(\frac{z}{\rho}, \frac{t}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ が $\frac{z}{\rho} \in U_\Lambda(\frac{\tau}{\rho}/\rho)$ を満たすならば $j \neq 1$ の時 $\varphi \in C_0^\infty(\tilde{\Omega}_{\frac{z}{\rho}}(\frac{\tau}{\rho}/\rho) \times \mathbb{R}_t)$ に対して

$$(3.13) \quad \rho^{1/2} \|M_{\frac{z}{\rho}}^{(\omega)}(\frac{\tau}{\rho}) \varphi\| \leq C \|z_j^{m_j} \tau^{1/2} \varphi\|,$$

となる.

補題3.2 もし $\partial\bar{\Omega}$ の点 $(\frac{z}{\rho}, \frac{t}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ が $\frac{z'}{\rho} \in U_\Lambda(\frac{\tau}{\rho}/\rho)$ で $j \in \Lambda$ に対して $\frac{z_j}{\rho} = 0$ となれば, $j \neq 1$ の時 $\varphi \in C_0^\infty(\tilde{\Omega}_{\frac{z'}{\rho}}(\frac{\tau}{\rho}/\rho) \times \mathbb{R}_t)$ に対して

$$(3.14) \quad \rho^{\varepsilon_j} \|M_{\frac{z'}{\rho}}^{(\omega)}(\frac{\tau}{\rho}) \varphi\| \leq C (\|L_j \varphi\| + \|\bar{L}_j \varphi\| + \|z_j^{m_j} \tau^{1/2} \varphi\|),$$

となる.

補題3.1は(3.2)-(3.4)より直接導けるが, 補題3.2は[6]の様に退化した作用素の先験的评价を求める際によく用

いられる交換子の方法を利用している。ここでは

$$\underbrace{[L_j, [L_j, [\dots, [L_j, z_j^{m_j}]] \dots]}_{m_j} = C \neq 0$$

となることが本質的である。

$(\frac{\sigma}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{\rho}{2}) \in \partial \Omega$ に対して

$$\begin{aligned} (3.15) \quad E_{(\frac{\sigma}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{\rho}{2})}^{j,k}(\varphi, \psi) &= \| [L_j, \Psi] \varphi \|^2 + \| [L_k, \Psi] \psi \|^2 + \| [\bar{L}_j, \Psi] \varphi \|^2 \\ &+ \| \frac{M^{(j)}}{M^{(k)}} [\bar{L}_k, \Psi] \varphi \|^2 + \| \frac{M^{(k)}}{M^{(j)}} [\bar{L}_j, \Psi] \psi \|^2 + \| \frac{1}{M^{(k)}} [L_j, [\bar{L}_k, \Psi]] \varphi \|^2 \\ &+ \| \frac{1}{M^{(j)}} [L_k, [\bar{L}_j, \Psi]] \psi \|^2 + |(C_{ij}(\frac{\sigma}{2} - D_{\bar{L}_j}) \Psi \varphi, \psi)|, \end{aligned}$$

$$(3.16) \quad F_{(\frac{\sigma}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{\rho}{2})}^{j,k}(\varphi, \psi) = \| \frac{1}{M^{(k)}} [\bar{L}_k, \Psi] L_j \varphi \|^2 + \| \frac{1}{M^{(j)}} [\bar{L}_j, \Psi] L_k \psi \|^2,$$

と置く。ただし $\Psi = \Psi_{(\frac{\sigma}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{\rho}{2})}^p$, $M^{(j)} = M_{\frac{\sigma}{2}}^{(j)}(\frac{\sigma}{2}/p)$ とする。

(2.3)の右辺に Ψ を使って超局所的な分解を行ない

$\| \Psi \bar{\partial}_b \varphi \|^2 + \| \Psi \partial_b \varphi \|^2$ の下からの評価を求めるには (2.1) と (2.2) より

$$\begin{aligned} \| \Psi \bar{\partial}_b \varphi \|^2 + \| \Psi \partial_b \varphi \|^2 &= \sum'_{I, J} \sum_{j \in J} \| \Psi \bar{L}_j \varphi_{I, j} \|^2 \\ &+ \sum'_{I, K} \sum_k \| \Psi L_k \varphi_{I, k} \|^2 + \sum'_{I, K} \sum_{j \neq k} (\operatorname{Re}(\Psi L_j \varphi_{I, jk}, \Psi L_k \varphi_{I, k}) \\ &- \operatorname{Re}(\Psi \bar{L}_k \varphi_{I, jk}, \Psi \bar{L}_j \varphi_{I, k})), \end{aligned}$$

となり、更に L_j, \bar{L}_j と Ψ の交換子 をとり部分積分で L_j の位置を変えることによって (3.12) や 補題 3.1, 3.2 を適用させるこ

とが出来る、この結果次の命題を得る、

命題3.3 $\partial\Omega$ の点 (z', t, τ) が $z' \in U_1(t/p)$, $t \geq p$ で $j \in \Lambda$ に対して $\bar{z}_j = 0$ となるとする、 p を十分大きくすると、任意の $\varepsilon > 0$ に対して定数 $C > 0$ が存在して、

$$\begin{aligned}
 (3.17) \quad & \sum'_{I,J} \sum_{j \in J} (p^{\varepsilon_j} \|M_{z'}^{(j)}(t/p) \Psi_{(z', t, \tau)}^p \varphi_{I,j}\|^2 \\
 & + \|\Psi_{(z', t, \tau)}^p L_j \varphi_{I,j}\|^2) \\
 & \leq C (\|\Psi_{(z', t, \tau)}^p \partial_b \varphi\|^2 + \|\Psi_{(z', t, \tau)}^p \mathcal{V}_b \varphi\|^2) \\
 & + \sum'_{K,j,k} (CE_{(z', t, \tau)}^{j,k}(\varphi_{I,jk}, \varphi_{I,kk}) + EF_{(z', t, \tau)}^{j,k}(\varphi_{I,jk}, \varphi_{I,kk})),
 \end{aligned}$$

が $\varphi = \sum'_{|I|=p, |J|=q} \varphi_{I,J} \omega_I \wedge \bar{\omega}_J$ に対して成立する、ここで C は (z', t, τ) や p に依存しない、

§4 局所的評価の張り合せ

$\mathbb{C}_{z'}^m \times \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_\tau$ の点列 $\{(z'_l, t_l, \tau_l)\}_{l=1}^\infty$ を次を満たす様を選

$$\begin{aligned}
 & \text{よに} \\
 & \tau_l \geq p, \quad \{\tau \geq p\} \subset \bigcup_{l=1}^\infty \Omega_{(z'_l, t_l, \tau_l)}^p.
 \end{aligned}$$

更にある定数 C が存在して、

$$(4.1) \quad \frac{1}{C} \leq \sum_{l=1}^\infty \Psi_{(z'_l, t_l, \tau_l)}^p \leq C.$$

となり $\Omega_{(z'_l, t_l, \tau_l)}^p$ が重り合う個数がある一定の値以下とな

る、簡単のために $\Omega_l = \Omega_{(z'_l, t_l, \tau_l)}$, $M_l^{(\omega)} = M_{(z'_l, t_l, \tau_l)}^{(\omega)}$,

$\psi_l = \psi_{(z'_l, t_l, \tau_l)}^p$, $\Psi_l = \Psi_{(z'_l, t_l, \tau_l)}^p$ と書く

擬微分作用素 $[L_j, \psi_\ell]$ や $[\bar{L}_j, \psi_\ell]$ などの表象の評価を行ない、剰余項の ℓ に関する和が L^2 ノルムで評価出来ることに留意すれば次の命題が得られる。

命題 4.1 ある定数 $C > 0$ が存在して、

$$(4.2) \quad \sum_{\ell=1}^{\infty} E_{(\xi_\ell, t_\ell, \tau_\ell)}^{j,k}(\varphi, \psi) \leq C \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \|M_\ell^{(j)} \psi_\ell \varphi\|^2 + \|M_\ell^{(k)} \psi_\ell \psi\|^2 + \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 \right),$$

$$(4.3) \quad \sum_{\ell=1}^{\infty} F_{(\xi_\ell, t_\ell, \tau_\ell)}^{j,k}(\varphi, \psi) \leq C \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \|\psi_\ell L_j \varphi\|^2 + \|\psi_\ell L_k \varphi\|^2 + \|(1+D_t^2)^{-1/2} L_j \varphi\|^2 + \|(1+D_t^2)^{-1/2} L_k \psi\|^2 \right).$$

尤に (3.17) における ε を十分小さくすることによって $F_{j,k}^{j,k}$ を左辺の $\|\psi_\ell L_j \varphi_{I,J}\|^2$ に吸収させることができ、 ρ を十分大きくすることによって $E_{j,k}^{j,k}$ を $\rho^{\varepsilon_j} \|M_\ell^{(j)} \psi_\ell \varphi_{I,J}\|^2$ に吸収させることができるので次の不等式を得る。

$$(4.4) \quad \sum_{\ell} \sum_{I,J} \left(\sum_{j \in J} \rho^{\varepsilon_j} \|M_\ell^{(j)} \psi_\ell \varphi_{I,J}\|^2 \right) \leq C \left(\sum_{\ell} (\|\psi_\ell \partial_b \varphi\|^2 + \|\psi_\ell \partial_b \psi\|^2) + \|\varphi\|^2 \right).$$

$\{\psi_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ を ℓ^2 値の擬微分作用素と見做し、 ψ_ℓ の台で

$$C \tau^{1/2(1+m_j)} \leq M_\ell^{(j)}$$

であることに注意すれば (4.4) から (2.3) を導けることが分り、よって定理 1.1 が証明される。

参考文献

- [1] R. Catlin, Necessary conditions for subellipticity of the $\bar{\partial}$ -Neumann problem, *Ann. of Math.* 117 (1983), 147-171.
- [2] —, Subelliptic estimates for the $\bar{\partial}$ -Neumann problem on pseudoconvex domains, *Ann. of Math.* 126 (1987), 131-191.
- [3] G.B. Folland, J. J. Kohn, The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex, Princeton Univ. Press, 1972.
- [4] J. E. Foræss, N. Sibony, Construction of P.S.H. functions on weakly pseudoconvex domains, *Duke Math. J.* 58 (1989), 633-655.
- [5] K. Hasegawa, Subelliptic estimates for the $\bar{\partial}$ -Neumann problem on certain weakly pseudo-convex domains, preprint.
- [6] L. Hörmander, Subelliptic operators, *Seminar on sing. of sol. of diff. eq.* Princeton Univ. Press (1979), 127-208.
- [7] J. J. Kohn, Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifold I, II, *Ann. of Math.* 78 (1963), 112-148, *ibid.* 79 (1964), 450-472.
- [8] —, Subellipticity of the $\bar{\partial}$ -Neumann problem on pseudo-convex domains: sufficient conditions, *Acta Math.* 142 (1979), 99-122.
- [9] W. J. Sweeney, A condition for subellipticity in Spencer's Neumann problem, *J. Differential Equations* 21 (1976), 316-362.